

内 容 简 介

本书依据教育部最新制定的“高职高专教育近机械类专业力学基本要求”编写而成。在编写中强调从高职学生的实际需要出发，以培养学生解决实际问题的能力为目标，在内容选择上以专业够用为原则，概念侧重理解，公式强化会用，采用了大量的实例，引入知识点，使读者更容易接受。本书涵盖理论力学和工程力学的基础知识，主体部分由静力分析和构件的承载能力分析组成。

本书可作为高职高专机械类专业70学时左右的工程力学课程的教学用书。



机电类

主编：	王微 孟丽华 陈纪亭
定价：	¥35元
印张：	14.5
书号：	978-7-5181-0121-4
出版社：	西安交通大学出版社

目 录

绪论	第5章轴向拉伸与压缩	8.10小结
第1章静力学的基本概念	5.1拉伸与压缩的概念	8.11习题
1.1静力学基本概念	5.2拉伸与压缩时横截面上的内力	第9章组合变形
1.2静力学公理	5.3拉伸与压缩时横截面上的应力	9.1概述
1.4力矩、合力矩定理	5.4斜截面上的应力与剪应力互等定律	9.2拉伸（压缩）与弯曲的组合变形
1.5力偶及其性质	5.5轴向拉压杆的变形与胡克定律	9.3弯曲与扭转的组合变形
1.6力的平移定理	5.6材料在轴向拉压时的力学性能	9.4小结
1.7约束与约束反力	5.7轴向拉压杆的强度计算	9.5习题
1.8物体的受力分析及实例	5.8拉压杆的超静定问题简介	第10章压杆稳定
1.9小结	5.9小结	10.1压杆稳定性的概念
1.10习题	5.10习题	10.2细长杆临界力
第2章平面汇交力系	第6章剪切与挤压	10.3临界应力与临界应力总图
2.1平面任意力系的简化	6.1剪切与挤压的概念	10.4压杆的稳定计算及合理设计
2.2平面任意力系的平衡方程及其应用	6.2剪切与挤压的实用强度计算	10.5小结
2.3平面力偶系的合成与平衡	6.3小结	10.6习题
2.4静定与超静定问题及物体系统的平衡	6.4习题	第11章动载荷与疲劳强度
2.5考虑摩擦时物体的平衡问题	第7章扭转	11.1动载荷和动应力的概念
2.6小结	7.1扭转的概念和外力偶矩的计算	11.2惯性力的问题
2.7习题	7.2扭矩与扭矩图	11.3疲劳强度
第3章空间力系与重心	7.3圆轴扭转时的应力与强度计算	11.4持久极限及其影响因素
3.1力在空间直角坐标轴上的投影	7.4圆轴扭转强度条件及应用	11.5对称循环下构件的疲劳强度计算
3.2力对轴之矩与合力矩定理	7.5圆轴扭转变形时的变形与刚度计算	11.6持久极限曲线
3.3空间力系的平衡方程及应用	7.6小结	11.7非对称循环下构件的疲劳强度计算
3.4重心	7.7习题	11.8小结
3.5小结	第8章弯曲	11.9习题
3.6习题	8.1平面弯曲和静定梁	习题参考答案
第4章材料力学的基本概念	8.2平面弯曲内力—剪力和弯矩	附录 I 几种常见简单形状均质物体的转动惯量
4.1变形固体的基本假设	8.3剪力图和弯矩图	附录 II 型钢表
4.2外力及其分类	8.4载荷集度、剪力和弯矩的关系	附录 III 中英文名词对照表
4.3内力、截面法和应力的概念	8.5平面弯曲梁横截面上的正应力	参考文献
4.4杆件变形的基本形式	8.6梁的正应力强度计算	
4.5小结	8.7弯曲剪应力简介	
4.6习题	8.8梁的变形	
	8.9提高梁承载能力的措施	

第 3 章 空间力系与重心

力系中各力的作用线不在同一平面内，该力系称为空间力系。按力系各力作用线的分布情况，空间力系可分为空间汇交力系、空间平行力系和空间任意力系。本章重点讨论力在空间直角坐标轴上的投影、力对轴之矩的概念与运算方法以及空间力系平衡问题的求解方法，并由空间平行力系导出重心的概念及求重心位置的方法。

3.1 力在空间直角坐标轴上的投影

3.1.1 力在空间直角坐标轴上的投影

1. 直接投影法

当力 F 与 x 、 y 、 z 轴的正向夹角 α 、 β 、 γ 已知时，由于图 3-1a 中 $\triangle OBA$ 、 $\triangle OCA$ 、 $\triangle ODA$ 均为直角三角形，所以可直接求出力 F 在三个坐标轴上投影，故有：

$$F_x = F\cos\alpha; F_y = F\cos\beta; F_z = F\cos\gamma \quad (3-1)$$

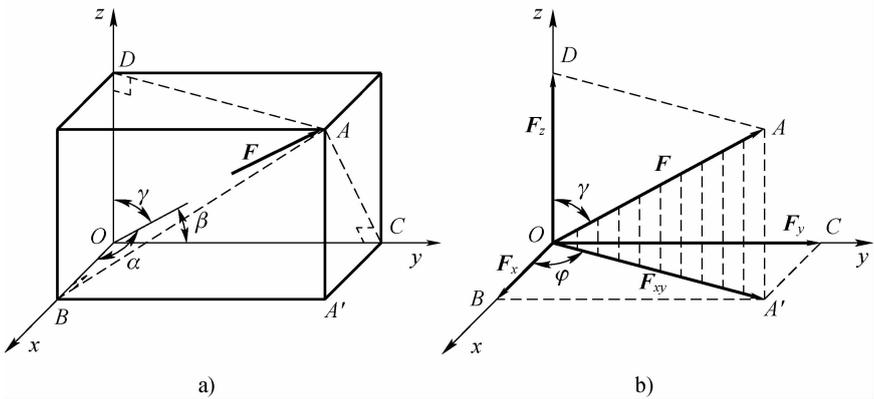


图 3-1

2. 二次投影法

若已知力 F ，力 F 与 z 轴的夹角 γ 及力 F 在和 Oxy 坐标平面内的投影 F_{xy} 与 x 轴的夹角 φ (图 3-2b)，则力 F 在 x 、 y 、 z 三轴的投影计算可分为两步进行，即

①将力 F 投影到 z 轴和 Oxy 坐标平面，以 F_z 和 F_{xy} 表示；②将 F_{xy} 投影到 x 、 y 轴上，求出力 F 在 x 、 y 两坐标轴上的投影。其过程如下：

$$F \Rightarrow \begin{cases} F_z = F \cos \gamma \\ F_{xy} = F \sin \gamma \Rightarrow \begin{cases} F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \sin \gamma \cos \varphi \\ F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \sin \gamma \sin \varphi \end{cases} \end{cases} \quad (3-2)$$

反之, 如果已知力 F 在 x 、 y 、 z 三个坐标轴上的投影 F_x 、 F_y 、 F_z , 也可以求出 F 的大小和方向。其形式为:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (3-3)$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F} \quad (3-4)$$

3.1.2 合力投影定理

设有一空间汇交力系 F_1 、 F_2 、 \dots 、 F_n , 利用力的平行四边形法则, 可将其逐步合成为一个合力矢 F_R , 且有:

$$F_R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F$$

因此有:

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_x \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum F_y \\ F_{Rz} &= F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum F_z \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

空间汇交力系的合力在某轴上的投影, 等于力系中各力在同一轴上投影的代数合, 式(3-5)称为空间力系的合力投影定理。

例 3-1 已知在边长为 a 的正六面体上有 $F_1 = 10\text{N}$, $F_2 = 20\text{N}$, $F_3 = 30\text{N}$, 如图 3-2 所示, 求各力在三坐标轴上的投影。

解: 由于 F_1 平行 z 轴, 故:

$$F_{1x} = 0; \quad F_{1y} = 0; \quad F_{1z} = 10\text{N}$$

由于 F_2 平行 Oxz 平面, 故:

$$F_{2x} = -F_2 \cos \alpha = -20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -14.14(\text{N})$$

$$F_{2y} = 0$$

$$F_{2z} = F_2 \sin \alpha = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 14.14(\text{N})$$

由于 F_3 沿正六面体的对角线, 故计算 F_3 在各轴上的投影, 需用二次投影法, 先将 F_3 投影到 Oxy 面上, 然后再向 x 、 y 轴投影, 即:

$$F_{3x} = -F_3 \cos \beta \cos 45^\circ = -30 \times \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -17.32(\text{N})$$

$$F_{3y} = -F_3 \cos \beta \sin 45^\circ = -30 \times \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -17.32(\text{N})$$

$$F_{3z} = F_3 \sin \beta = 30 \times \frac{a}{\sqrt{3}a} = 17.32(\text{N})$$

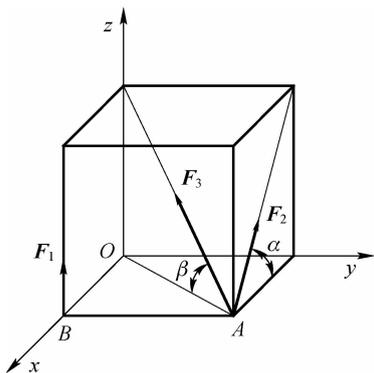


图 3-2

例3-2 已知圆柱斜齿轮所受的啮合力 $F_n = 1000\text{N}$ ，齿轮压力角 $\alpha = 20^\circ$ ，螺旋角 $\beta = 25^\circ$ ，如图3-3a所示。试计算斜齿轮所受的圆周力 F_t 、轴向力 F_a 、径向力 F_r 。

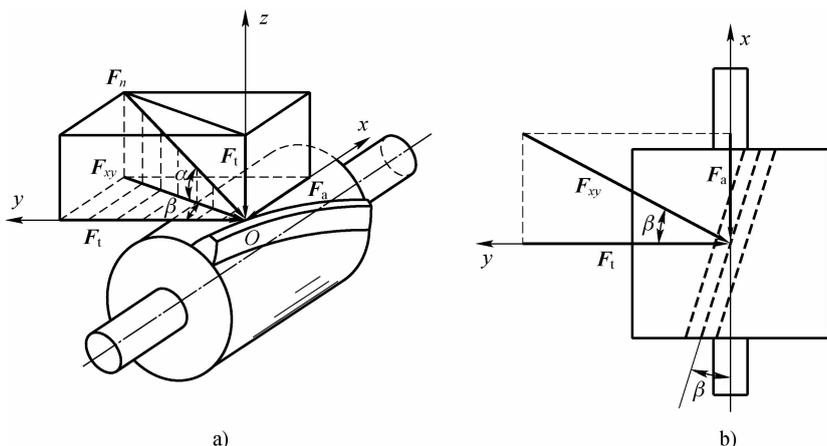


图3-3

解：取坐标轴如图1-3b所示，使 x 、 y 、 z 分别沿齿轮的轴向、圆周的切线方向和径向。先把啮合力 F_n 向 z 轴和 Oxy 坐标平面投影，得：

$$\begin{aligned} F_z = -F_r &= -F_n \sin \alpha = -1000 \sin 20^\circ \\ &= -342 \text{ (N)} \end{aligned}$$

F_n 在 Oxy 平面上的分力 F_{xy} ，其大小为：

$$F_{xy} = F_n \cos \alpha = 1000 \cos 20^\circ = 940 \text{ (N)}$$

然后再把 F_{xy} 投影到 x 、 y 轴，得：

$$\begin{aligned} F_x = F_a &= -F_{xy} \sin \beta = -F_n \cos \alpha \sin \beta \\ &= -1000 \cos 20^\circ \sin 25^\circ \\ &= -397 \text{ (N)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y = F_t &= -F_{xy} \cos \beta = -F_n \cos \alpha \cos \beta \\ &= -1000 \cos 20^\circ \cos 25^\circ \\ &= -852 \text{ (N)} \end{aligned}$$

3.2 力对轴之矩与合力矩定理

3.2.1 力对轴之矩的概念

在工程中，常遇到刚体绕定轴转动的情形。为了度量力对转动刚体的作用效应，需要建立力对轴之矩的概念。

现以推门动作为例，如图3-4所示，门的一边有固定轴 z ，在 A 点作用一力 F ，为度量此力对刚体的转动效应，可将力 F 分解为两个互相垂直的分力：一个是与转轴平行的分力 $F_z = F \sin \beta$ ；另一个是在与转轴 z 垂直平面上的分力 $F_{xy} = F \cos \beta$ 。

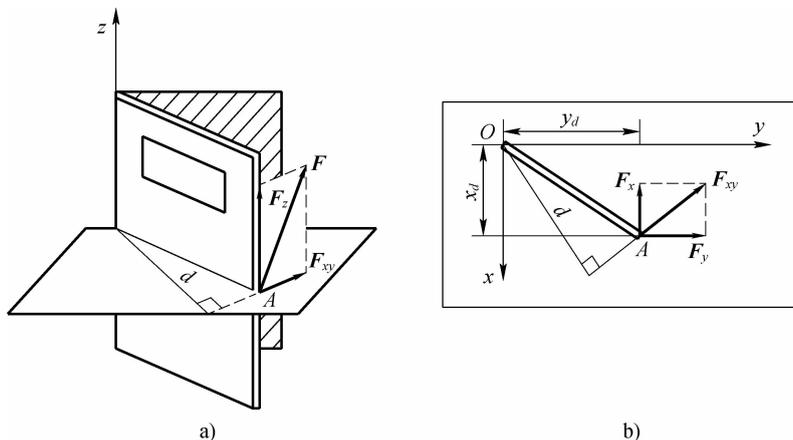


图 3-4

由经验可知，分力 F_z 不能使门绕 z 轴转动，所以分力 F_z 对 z 之矩为零；只有分力 F_{xy} 才对门有绕 z 轴的转动作用。

若以 d 表示 z 轴与 xy 平面的交点 O 到 F_{xy} 作用线的垂直距离，则 F_{xy} 对 O 点之矩，就可以用来度量力 F 对门绕 z 轴的转动作用。现用符号 $M_z(F)$ 表示 F 对 z 轴之矩，则可记作：

$$M_z(F) = M_O(F_{xy}) = \pm F_{xy} d \quad (3-6)$$

力对轴之矩是代数量，其值等于此力在垂直该轴平面上的投影对该轴与此平面的交点之矩。力矩的正负代表其转动作用的方向。当从 z 轴正向看，逆时针方向转动为正，顺时针方向转动为负。当力的作用线与转轴平行时，或者与转轴相交时，即当力与转轴共面时，力对该轴之矩等于零。力对轴之矩的单位为 $N \cdot m$ 。

3.2.2 合力矩定理

设有一空间力系 F_1, F_2, \dots, F_n ，其合力为 F_R ，则可证明合力 F_R 对某轴之矩等于各分力对同轴力矩的代数和，可写成：

$$M_z(F_R) = \sum M_z(F) \quad (3-7)$$

式 (3-7) 称为合力矩定理，常被用来计算空间力对轴之矩。

设有一个空间力 F ，作用点 A 的坐标为 (x, y, z) ，该力在三个坐标轴上的分力大小（即该力在 x, y, z 轴上的投影）分别为 F_x, F_y, F_z ，则该力对三个坐标轴的矩为（证明从略）：

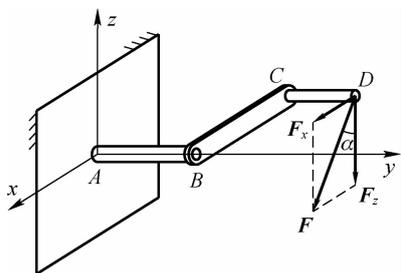


图 3-5

$$\left. \begin{aligned} M_x(F) &= yF_z - zF_y \\ M_y(F) &= zF_x - xF_z \\ M_z(F) &= xF_y - yF_x \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

例 3-3 如图 3-5 所示，手柄 $ABCD$ 在 xy 平面内，在 D 点作用一个力 F ，该力平行于 xz 平面，已知 $F = 200N$ ， $\alpha = 30^\circ$ ， $AB = 20cm$ ， $BC = 30cm$ ， $CD = 15cm$ ，试求 F 对 x, y, z 轴之矩。

解:

$$F_x = F \sin \alpha, \quad F_z = F \cos \alpha,$$

根据合力矩定理, 可求力 F 对各轴之矩为:

$$\begin{aligned} M_x(\mathbf{F}) &= M_x(\mathbf{F}_x) + M_x(\mathbf{F}_z) = 0 - F_z(AB + CD) = -200 \cos 30^\circ \times 0.35 \\ &= -60.62 (\text{N} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y(\mathbf{F}) &= M_y(\mathbf{F}_x) + M_y(\mathbf{F}_z) = 0 - F_z BC = -200 \cos 30^\circ \times 0.3 \\ &= -51.96 (\text{N} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_z(\mathbf{F}) &= M_z(\mathbf{F}_x) + M_z(\mathbf{F}_z) = -F_x(AB + CD) = -200 \sin 30^\circ \times 0.35 \\ &= -35 (\text{N} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

3.3 空间力系的平衡方程及应用

空间任意力系的平衡条件也是通过力系的简化得出的。和平面任意力系相仿, 空间任意力系也可以简化为主矢和主矩, 当主矢和主矩都等于零矢, 刚体处于平衡状态, 此时所对应的平衡条件是:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \sum M_x(F) &= 0 \\ \sum M_y(F) &= 0 \\ \sum M_z(F) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

式 (3-9) 表明空间任意力系平衡的充分必要条件是: 各力在三个坐标轴上的投影的代数和以及各力对此三轴之矩的代数和分别等于零。

式 (3-9) 有六个独立的平衡方程, 可以求解六个未知量, 它是解决空间力系平衡问题的基本方程。

由式 (3-9) 可得出空间任意力系的特殊情况下的平衡方程式如下:

空间汇交力系

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

空间平行力系 (假设各力平行于 z 轴)

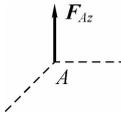
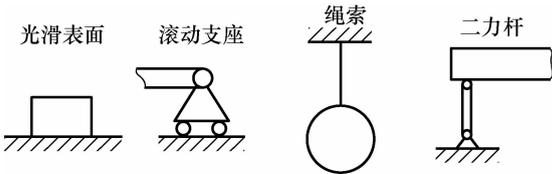
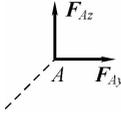
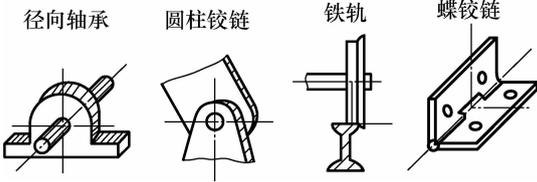
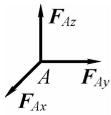
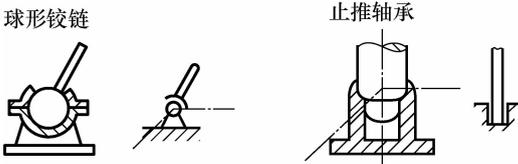
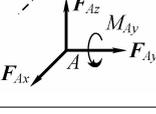
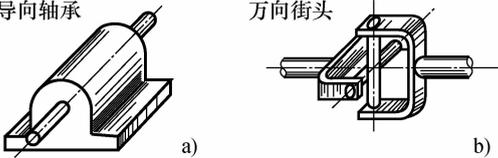
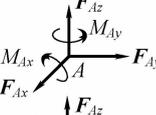
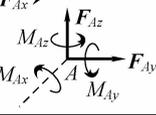
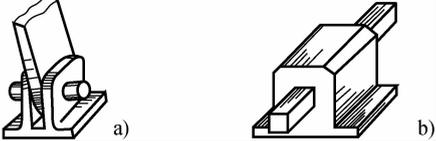
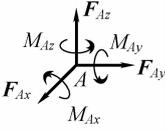
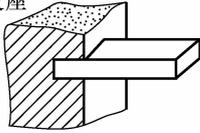
$$\left. \begin{aligned} \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x(F) &= 0 \\ \sum M_y(F) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

求解空间力系的平衡问题的基本方法与步骤同平面力系相同。即:

- (1) 确定研究对象, 画出分离体受力简图。
- (2) 确定力系类型, 列出平衡方程。
- (3) 代入已知条件, 求解未知量。

根据约束类型, 正确画出分离体受力图是解决问题的关键, 表 3-1 列出了空间常见的约束类型及约束力的表示法。

表 3-1 空间约束的类型及其约束反力举例

	约束反力未知量	约 束 类 型
1		<p>光滑表面 滚动支座 绳索 二力杆</p> 
2		<p>径向轴承 圆柱铰链 铁轨 蝶铰链</p> 
3		<p>球形铰链 止推轴承</p> 
4	<p>a) </p> <p>b) </p>	<p>导向轴承 万向街头</p> 
5	<p>a) </p> <p>b) </p>	<p>带有销子的夹板 导轨</p> 
6		<p>空间的固定端支座</p> 

例 3-4 如图 3-6a 所示, 用起重杆吊起重物。起重杆的 A 端用球铰接固定在地面上, 而 B 端则用绳 CB 和 DB 拉住, 两绳分别系在墙上的点 C 和 D , 连线 CD 平行与 x 轴。已知: $CE = EB = DE$, $\alpha = 30^\circ$, CDB 平面与水平面间的夹角 $\angle EBF = 30^\circ$ (图 3-6b), 物重 $P = 10\text{kN}$ 。如起重杆的重量不计, 试求起重杆所受的压力和绳子的拉力。

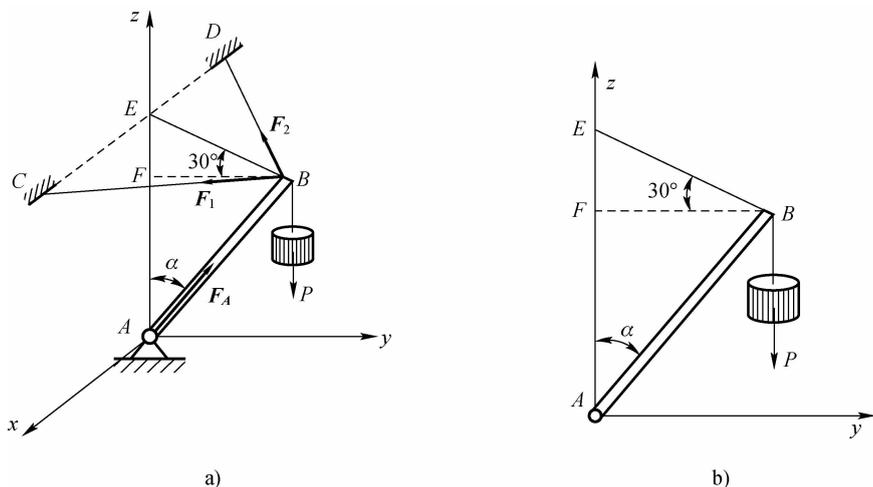


图 3-6

解：取起重杆 AB 与重物为研究对象，其上受有主动力 P ， B 处受绳拉力 F_1 与 F_2 ；球铰链 A 的约束反力方向一般不能预先确定，可用三个正交分力表示。本题中，由于杆重不计，又只在 A 、 B 两端受力，所以起重杆 AB 为二力构件，球铰 A 对 AB 杆的反力 F_A 必沿 A 、 B 连线。 P 、 F_1 、 F_2 和 F_A 四个力汇交于点 B ，为一空间汇交力系。

取坐标轴如图 3-6 所示。由已知条件知： $\angle CBE = \angle DBE = 45^\circ$ ，列平衡方程：

$$\begin{cases} \sum F_x = 0, F_1 \sin 45^\circ - F_2 \sin 45^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0, F_A \sin 30^\circ - F_1 \cos 45^\circ \cos 30^\circ - F_2 \cos 45^\circ \cos 30^\circ = 0 \\ \sum F_z = 0, F_1 \cos 45^\circ \sin 30^\circ + F_2 \cos 45^\circ \sin 30^\circ + F_A \cos 30^\circ - P = 0 \end{cases}$$

求解上面的三个平衡方程，得：

$$F_1 = F_2 = 3.54 \text{ (kN)}$$

$$F_A = 8.66 \text{ (kN)}$$

F_A 为正值，说明图中所设 F_A 的方向正确，杆 AB 受压力。

例 3-5 图 3-7 所示的三轮车，自重 $P = 8 \text{ kN}$ ，作用于点 E ，载荷 $P_1 = 10 \text{ kN}$ ，作用于点 C 。求小车静止时地面对车轮的反力。

解：以小车为研究对象，受力如图 3-7 所示。其中 P 和 P_1 是主动力， F_A 、 F_B 和 F_D 为地面的约束反力，此 5 个力相互平行，组成空间平行力系。

取坐标系 $Oxyz$ 如图 3-7 所示，列出三个平衡方程：

$$\sum F_z = 0, -P_1 - P + F_A + F_B + F_D = 0$$

(1)

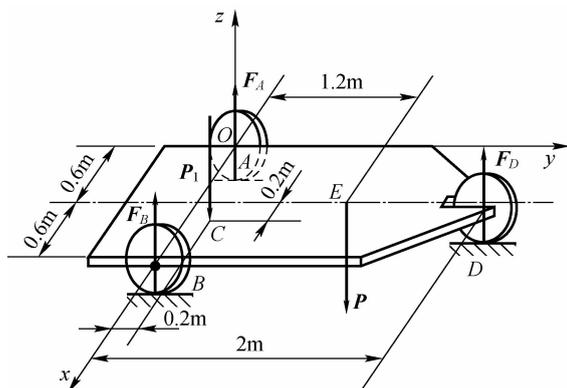


图 3-7

$$\sum M_x(F) = 0, -0.2P_1 - 1.2P + 2F_D = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_y(F) = 0, 0.8P_1 + 0.6P - 0.6F_D - 1.2F_B = 0 \quad (3)$$

由式 (1) 解得:

$$F_D = 5.8 \text{ (kN)}$$

代入式 (2), 解出:

$$F_B = 7.777 \text{ (kN)}$$

代入式 (3), 解出:

$$F_A = 4.423 \text{ (kN)}$$

例 3-6 如图 3-8 所示, 某传动轴以 A、B 两轴承支承, 圆柱直齿轮的节圆直径 $d = 17.3 \text{ cm}$, 压力角 $\alpha = 20^\circ$ 。在法兰盘上作用一力偶矩 $M = 1030 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的力偶, 如轮轴自重和摩擦不计, 求传动轴匀速转动时的啮合力 F 及 A、B 轴承的约束反力 (图中尺寸单位为 cm)。

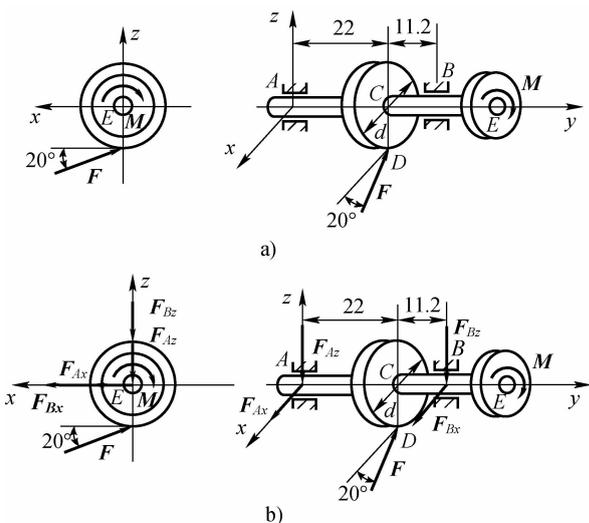


图 3-8

解: (1) 以整体为研究对象, 受力如图 3-8b 所示。受 A、B 轴承的约束反力 F_{Ax} 、 F_{Az} 、 F_{Bx} 、 F_{Bz} 以及啮合力 F 。组成空间任意力系。

(2) 选坐标系 $Axyz$, 列出平衡方程:

$$\sum M_y(F) = 0: F \cos 20^\circ \times \frac{d}{2} - M = 0$$

$$F = 12.67 \text{ (kN)}$$

$$\sum M_x(F) = 0: F \sin 20^\circ \times 22 - F_{Bz} \times 33.2 = 0$$

$$F_{Bz} = 2.87 \text{ (kN)}$$

$$\sum M_z(F) = 0: F \cos 20^\circ \times 22 - F_{Bx} \times 33.2 = 0$$

$$F_{Bx} = 7.89 \text{ (kN)}$$

$$\sum F_x = 0: F_{Ax} - F \cos 20^\circ + F_{Bx} = 0$$

$$F_{Ax} = 4.02 \text{ (kN)}$$

$$\sum F_z = 0: -F_{Az} + F \sin 20^\circ - F_{Bz} = 0$$

$$F_{Az} = 1.46 \text{ (kN)}$$

3.4 重 心

3.4.1 重心的概念

不论在日常生活中, 还是在工程实际中都会经常遇到重心问题。例如: 当我们用手推车推重物时, 只有将重物放在一定位置, 也就是使重物的重心正好与车轮轴线在同一铅垂面内时, 才能比较省力; 骑自行车时, 必须不断地调整重心的位置, 才不致翻倒; 冶金厂用的一种铁水包, 这种铁水包是利用小钩吊起包底, 以倾倒铁水 (图 3-9), 为了使它不致自由翻转, 就要求铁水包无论是空的还是装满铁水时, 其重心都要低于转轴 O ; 塔式起重机的重心位置更为重要, 一般都要加一定的配种重, 使它无论在空载还是满载时, 其重心的位置始终在两支承轮 A、B 之间 (图 3-10), 否则就会引起严重的翻倒事故; 机床中的一些高速旋转

的构件，如重心的位置偏离轴线，就会使机床产生激烈的振动，甚至引起破坏。因此，我们需要了解什么是重心和怎样确定重心的位置。

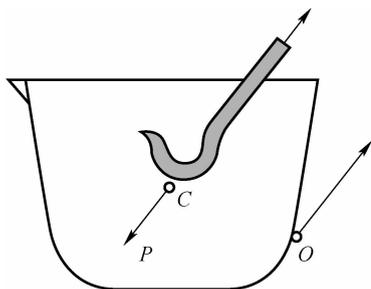


图 3-9

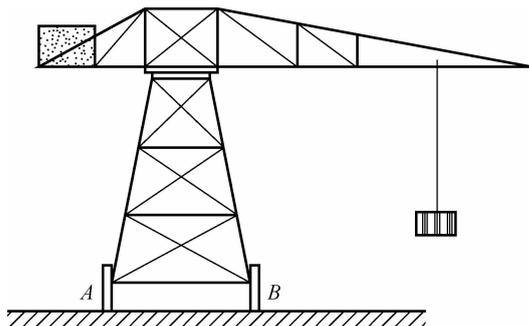


图 3-10

我们知道，物体的重力就是地球对物体的引力，若把物体想象分割成无数微小部分，则物体上每个微小部分都受着地球引力的作用。严格地说，这些引力组成的力系是一个空间汇交力系（交于地球的中心）。由于物体的尺寸与地球的半径相比小得多，因此可近似地认为这个力系是一空间平行力系，此平行力系的合力 G ，称为物体的重力。通过实验我们知道，无论物体怎样放置，这些平行力的合力总是通过物体内的一个确定点——平行力系的中心，这个点叫作物体的重心。

下面讨论怎样确定重心的位置。

3.4.2 重心坐标公式

取固连在物体上的空间直角坐标系 $Oxyz$ ，设物体的重心坐标为 x_c 、 y_c 、 z_c ，如图 3-11 所示。将物体分成若干微小部分，每个微小部分所受重力分别为 G_1 、 G_2 、 \dots 、 G_n ，各力作用点的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) ， (x_2, y_2, z_2) ， \dots ， (x_3, y_3, z_3) 。 G 是各重力 G_1 、 G_2 、 \dots 、 G_n 的合力。根据合力矩定理，合力 G 对轴之矩等于各分力对同轴之矩的代数和。如对 x 轴之矩有：

$$M_x(G) = \sum_{i=1}^n M_x(G_i)$$

或

$$G \cdot y_c = G_1 \cdot y_1 + G_2 \cdot y_2 + \dots + G_n \cdot y_n$$

可得：

$$y_c = \frac{\sum G_i \cdot y_i}{G}$$

同理可得对 y 轴之矩：

$$M_y(G) = \sum_{i=1}^n M_y(G_i)$$

或

$$G \cdot x_c = G_1 \cdot x_1 + G_2 \cdot x_2 + \dots + G_n \cdot x_n$$

可得：

$$x_c = \frac{\sum G_i \cdot x_i}{G}$$

将坐标系连同物体绕 y 轴转 90° ，使 x 轴铅直向上，重心位置不变，再应用合力矩定理，对新的 y 轴求力矩，用与上述相同的方法，可得：

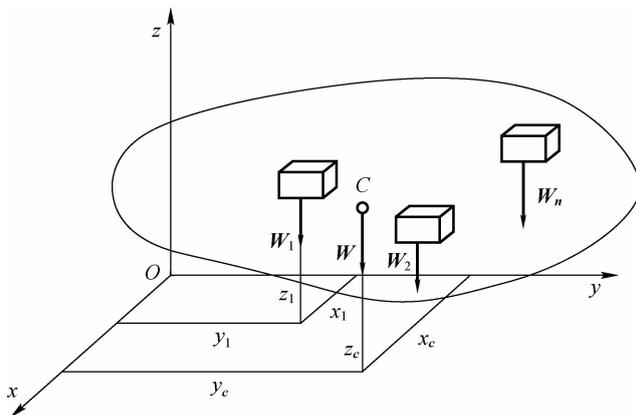


图 3-11

$$G \cdot z_c = G_1 \cdot z_1 + G_2 \cdot z_2 + \dots + G_n \cdot z_n$$

所以：

$$z_c = \frac{\sum G_i \cdot z_i}{G}$$

由以上得到重心坐标的一般公式为：

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum G_i \cdot x_i}{G} \\ y_c &= \frac{\sum G_i \cdot y_i}{G} \\ z_c &= \frac{\sum G_i \cdot z_i}{G} \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

在式 (3-12) 中，如以 $G_i = m_i g$ 、 $G = Mg$ 代入，在分子和分母中消去 g ，即得到公式：

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum m_i x_i}{M} \\ y_c &= \frac{\sum m_i y_i}{M} \\ z_c &= \frac{\sum m_i z_i}{M} \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

式 (3-13) 称为质心（质量中心）坐标公式，在均匀重力场内，质量中心与其重心的位置相重合。质心坐标公式将在动力学中用到。

1. 均质物体的重心坐标公式

均质物体的重量是均匀分布的，如物体单位体积的重量为 γ ，物体体积为 V ，则：

$$G = \gamma V$$

物体每个微小部分的重量分别为：

$$G_1 = \gamma V_1, \quad G_2 = \gamma V_2, \quad \dots, \quad G_n = \gamma V_n$$

代入重心坐标公式 (3-12) 中，则得到：

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_i V_i}{V} \\ y_c &= \frac{\sum y_i V_i}{V} \\ z_c &= \frac{\sum z_i V_i}{V} \end{aligned} \right\} \quad (3-14)$$

式 (3-14) 表明, 对均质物体来说, 物体的重心只与物体的形状有关, 而与物体的重量无关, 因此均质物体的重心也称为物体的形心。

2. 均质薄板的重心

对于平面薄板, 其重心只求两个坐标就可以了, 如图 3-12 所示的 x_c 和 y_c 。

设板的厚度为 h , 面积为 A , 将薄板分成若干微小部分, 每个微小部分的面积为 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_n , 则:

$$V = hA$$

$V_1 = hA_1$, $V_2 = hA_2$, \dots , $V_n = hA_n$ 代入式 (3-14) 中, 得到:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x_i A_i}{A} \\ y_c &= \frac{\sum y_i A_i}{A} \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

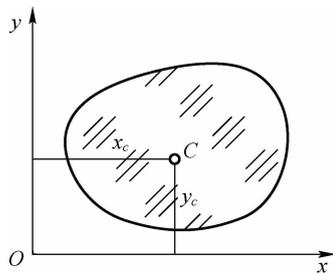


图 3-12

在式 (3-15) 中, 显然, $\sum y_i A_i = y_c A$ 。公式 $\sum y_i A_i = y_c A$ 称为截面图形对 x 轴的静矩。静矩的概念将在材料力学中用到。

在材料力学中, 求平面图形形心的公式, 就是求均质平面薄板的重心公式。

3.4.3 物体重心及形心位置的求法

在工程实际中, 物体通常是由一个或几个简单几何图形的物体组合而成 (即组合形体)。对于简单几何图形物体的重心, 可以从有关的工程手册中查到。下面将常见的几种简单几何图形物体的重心位置列表 3-2, 以供求组合重心时使用。

表 3-2 简单几何图形物体的面积及其重心

	图 形	面积 (或体积)	重 心
长方形		$A = ab$	$x_c = \frac{1}{2}a$ $y_c = \frac{1}{2}b$

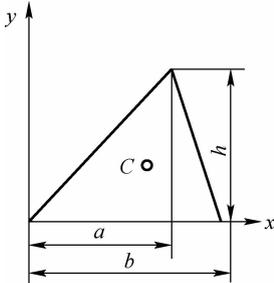
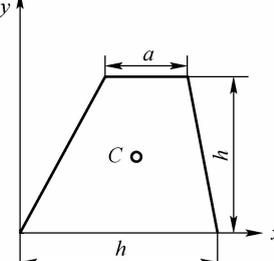
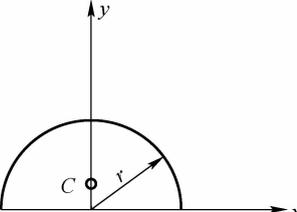
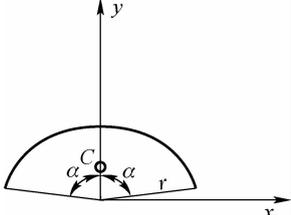
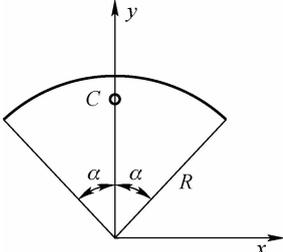
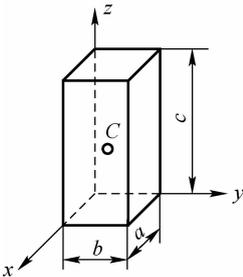
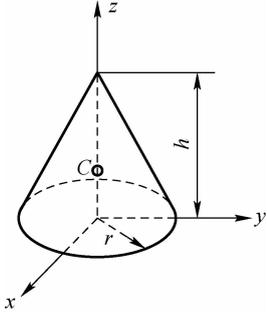
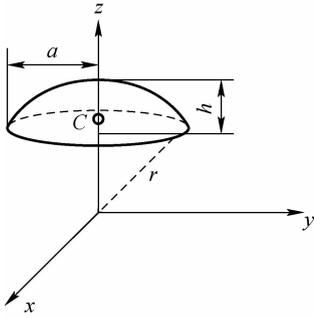
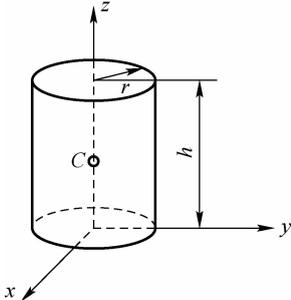
	图 形	面积 (或体积)	重 心
三角形		$A = \frac{1}{2}bh$	$x_c = \frac{1}{3}(a+b)$ $y_c = \frac{1}{3}h$
梯形		$A = \frac{h}{2}(a+b)$	$y_c = \frac{1}{3} \cdot \frac{h(2a+b)}{a+b}$ <p>(在上下底中点的连线上)</p>
半圆		$A = \frac{1}{2}\pi r^2$	$x_c = 0$ $y_c = \frac{4r}{3\pi}$
扇形		$A = \alpha r^2$	$x_c = 0$ $y_c = \frac{2}{3}r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$
圆弧		<p>弧长 $S = 2\alpha R$</p>	$x_c = 0$ $y_c = R \frac{\sin\alpha}{\alpha}$

	图 形	面积 (或体积)	重 心
长方体		$V = abc$	$x_c = \frac{1}{2}a$ $y_c = \frac{1}{2}b$ $z_c = \frac{1}{2}c$
正圆锥体		$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$x_c = 0$ $y_c = 0$ $z_c = \frac{1}{4}h$
球面扇形体		$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$	$x_c = 0$ $y_c = 0$ $z_c = \frac{3}{8}(2r - h)$
正圆柱体		$V = \pi r^2 h$	$x_c = 0$ $y_c = 0$ $z_c = \frac{1}{2}h$

1. 对称性法

在工程实际中,经常遇到具有对称轴、对称面或对称中心的均质物体。这种物体的重心一定在对称轴、对称面或对称中心上。图3-13a所示的工字钢截面,具有对称轴 $O-O'$,

则它的重心一定在 $O - O'$ 轴上；又如图 3 - 13b, 立方体具有对称中心 C , 则 C 点就是它的重心。

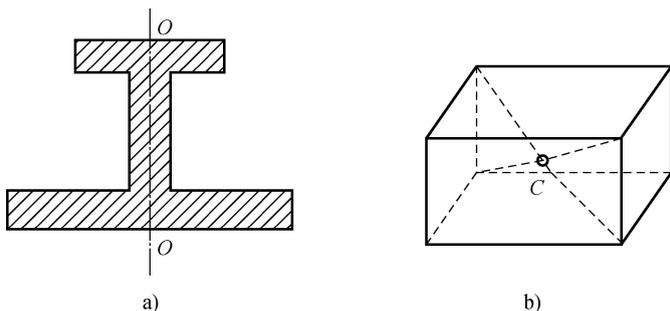


图 3 - 13

2. 分割法

组合形体形状比较复杂, 但它们大都可看成是表 3 - 2 中给出的简单几何图形的物体组合而成。分割法是将形状比较复杂的物体分成几个部分, 这些部分形状简单, 其重心位置容易确定, 然后, 根据重心坐标公式求出组合形体的重心。

例 3 - 7 图 3 - 14 所示为 Z 形钢的截面, 图中尺寸单位为 mm。求 Z 形截面的重心位置。

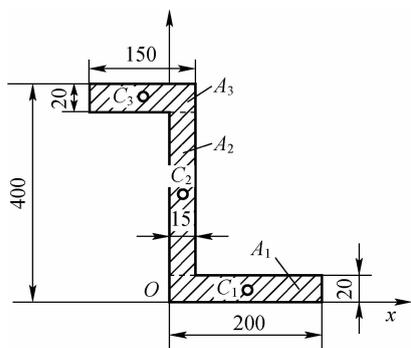


图 3 - 14

解: 将 Z 形截面分割为三部分, 每部分都是矩形。

设坐标 $Oxyz$, 它们的面积和坐标分别为:

$$A_1 = 20 \times 2 = 40 (\text{cm}^2)$$

$$x_1 = 10 \text{cm}, y_1 = 1 \text{cm}$$

$$A_2 = 36 \times 1.5 = 54 (\text{cm}^2)$$

$$x_2 = 0.75 \text{cm}, y_2 = 20 \text{cm}$$

$$A_3 = 15 \times 2 = 30 (\text{cm}^2)$$

$$x_3 = -6 \text{cm}, y_3 = 39 \text{cm}$$

将这些数据代入式 (3 - 15) 中, 得到 Z 形截面

重心位置为:

$$x_c = \frac{\sum x_i A_i}{A} = \frac{10 \times 40 + 0.75 \times 54 + (-6) \times 30}{40 + 54 + 30} = 2.1 (\text{cm})$$

$$y_c = \frac{\sum y_i A_i}{A} = \frac{1 \times 40 + 20 \times 54 + 39 \times 30}{40 + 54 + 30} = 18.47 (\text{cm})$$

3. 负面积法

若在物体内切去一部分, 要求剩余部分物体的重心时, 仍可应用分割法, 只是切去部分的面积 (或体积) 应取负值。

例 3 - 8 已知振动器中的偏心块的几何尺寸, $R = 10 \text{cm}$, $r = 1.3 \text{cm}$, $b = 1.7 \text{cm}$, 求偏心块重心的位置 (图 3 - 15)。

解: 本题属于求平面图形的重心问题, 由于有挖去的部分, 所以用负面积法。设坐标 $Oxyz$, 其中 Oy 轴为对称轴 (图 3 - 15)。根据对称法, 偏心块重心 C 在对称轴上, 所以:

$$x_c = 0$$

将偏心块分割成三部分：半径为 R 的半圆，半径为 $(r+b)$ 的半圆以及半径为 r 的小圆，最后一部分是挖掉的部分，其面积为负值。这三部分的面积及其坐标为：

$$A_1 = \frac{\pi R^2}{2}; y_1 = \frac{4R}{3\pi}$$

$$A_2 = \frac{\pi(r+b)^2}{2}; y_2 = -\frac{4(r+b)}{3\pi}$$

$$A_3 = -\pi r^2; y_3 = 0$$

由式 (3-18)，可得：

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{\sum y_i A_i}{A} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \\ &= \frac{\frac{4R}{3\pi} \times \frac{\pi R^2}{2} - \frac{4(r+b)}{3\pi} \times \frac{\pi(r+b)^2}{2} + 0 \times (-\pi r^2)}{\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi(r+b)^2}{2} - \pi r^2} \\ &= \frac{4[R^3 - (r+b)^3]}{3\pi[R^2 + (r+b)^2 - r^2]} = \frac{4(10^3 - 3^3)}{3\pi(10^2 + 3^2 - 1 \cdot 3^2)} \\ &= 3.9(\text{cm}) \end{aligned}$$

偏心块重心（即形心） C 的坐标分别为：

$$x_c = 0, y_c = 3.9\text{cm}$$

在这一例题中，综合运用了对称性、分割法和负面积法确定其重心位置。

4. 实验法

工程上还常用实验方法来测定复杂形状物体的重心，这种方法比较简便，且具有足够的准确度。

(1) 悬挂法。

例如装岩机设计时要求确定铲斗重心，铲斗具有对称面，根据对称性，其重心在此对称面内，只需确定对称面的重心即可。可用一均质等厚的板按一定的比例做成铲斗对称面形状。先悬挂在任意一点 A ，根据二力平衡原理，重心必在过悬挂点 A 的铅垂线上，标出此线 AB （图 3-16a）。然后再将它悬挂在任意点 D ，同理，标出另一直线 DE 。则 AB 和 DE 的交点 C 即为重心，如图 3-16b 所示。有时也可悬挂两次以上，以提高精确度。

(2) 称重法。

形状复杂或体积较大的物体常用称重法求重心。

例如曲柄滑块机构中的连杆，因为具有对称性，所以只要确定重心在此轴上的位置 h 即可。将连杆 A 端悬挂不动， B 端放在一磅秤上（图 3-17），测得 B 端反力的大小为 R_B 。因连杆处于平衡状态，所以由力矩方程：

$$\sum M_A = 0, \quad R_B \cdot l - Wh = 0$$

可得：

$$h = \frac{R_B \cdot l}{W}$$

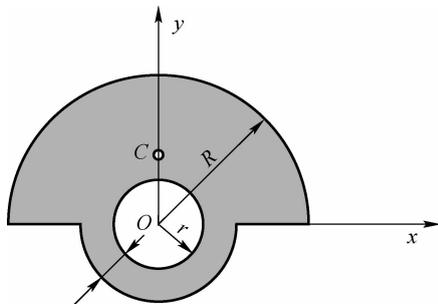


图 3-15

式中, l 及连杆重量 W 均可测出, 就是磅秤上的读数, 代入上式, 即可求出 h 的数值。

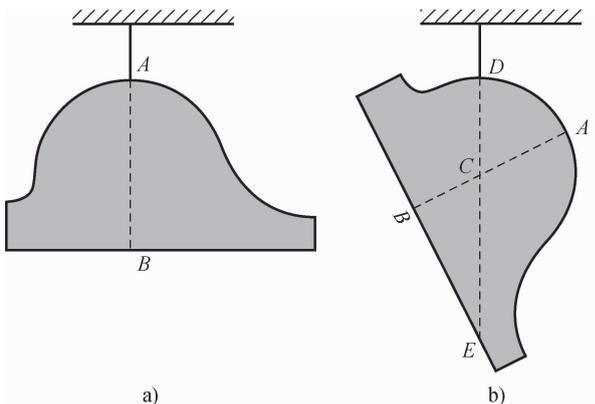


图 3-16

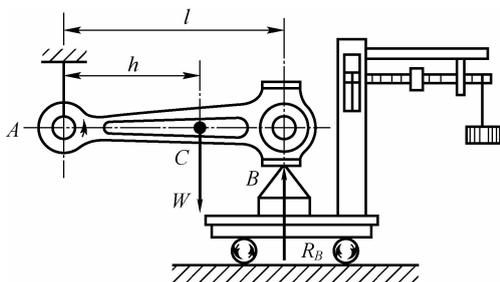


图 3-17

3.5 小 结

(1) 力在空间直角坐标轴上的投影计算。

直接投影法: 已知力 F 的大小及其与 x 、 y 、 z 轴的正向夹角 α 、 β 、 γ , 则有:

$$F_x = F \cos \alpha; F_y = F \cos \beta; F_z = F \cos \gamma$$

二次投影法: 若已知力 F 与 z 轴的夹角为 γ , 力 F 在和 Oxy 坐标平面内的投影 F_{xy} 与 x 轴的夹角为 φ , 则力 F 在 x 、 y 、 z 三轴的投影计算可分为两步进行, 即:

$$F \Rightarrow \begin{cases} F_z = F \cos \gamma \\ F_{xy} = F \sin \gamma \Rightarrow \begin{cases} F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \sin \gamma \cos \varphi \\ F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \sin \gamma \sin \varphi \end{cases} \end{cases}$$

(2) 合力投影定理: 力系的合力在某轴上的投影, 等于力系中各力在同一轴上投影的代数和。即 $F_{Rx} = \sum F_x$, $F_{Ry} = \sum F_y$, $F_{Rz} = \sum F_z$

(3) 度量力对刚体绕一轴转动效应的物理量称为力对轴之矩。它等于力在与转轴垂直的平面上的分力对轴与平面交点之矩。力对轴之矩是代数量, 正负号用右手螺旋法则来判定。

(4) 合力矩定理: 空间力系的合力 F_R 对某轴之矩等于力系中各分力对同轴力矩的代数和, 可写成 $M_z(F_R) = \sum M_z(F)$ 。计算空间力对轴之矩, 一般采用合力矩定理。

(5) 空间力系的平衡方程如下:

空间任意力系	空间汇交力系	空间平行力系 (假设力的作用线平行于 z 轴)
$\sum F_x = 0$ $\sum M_x(F) = 0$	$\sum F_x = 0$	$\sum F_z = 0$
$\sum F_y = 0$ $\sum M_y(F) = 0$	$\sum F_y = 0$	$\sum M_x(F) = 0$
$\sum F_z = 0$ $\sum M_z(F) = 0$	$\sum F_z = 0$	$\sum M_y(F) = 0$

(6) 物体重心与形心的计算：重力的作用中心称为重心，几何体的中心称为形心。

1) 重心计算公式：

$$x_c = \frac{\sum G_i \cdot x_i}{G}, y_c = \frac{\sum G_i \cdot y_i}{G}, z_c = \frac{\sum G_i \cdot z_i}{G}$$

2) 形心计算公式： $x_c = \frac{\sum x_i A_i}{A}$, $y_c = \frac{\sum y_i A_i}{A}$

3.6 习 题

3-1 在什么情况下力对轴之矩为零？如何判断力对轴之矩的正负号？

3-2 解空间任意力系平衡问题时应当怎样选取坐标轴会使所列方程简单、便于求解？

3-3 两形状和大小均相同、但质量不同的均质物体，其中心位置是否相同？

3-4 一组合体的各部分由不同材料制成，其重心和形心是否重合？为什么？

3-5 物体的重心是否一定在物体上？举例说明。

3-6 计算一物体的重心时选取不同的坐标系，得到重心的坐标不同，这是否意味着物体的重心位置会随着坐标系的不同而改变？

3-7 已知圆柱斜齿轮所受的啮合力 $F_n = 800\text{N}$ ，齿轮压力角 $\alpha = 20^\circ$ ，螺旋角 $\beta = 15^\circ$ ，如图 3-18 所示。试计算斜齿轮所受的圆周力 F_t 、轴向力 F_a 、径向力 F_r 。

3-8 图 3-19 所示的曲轴，在点 A 作用一力 F ，其作用线在垂直于 y 轴的平面内且与铅垂线方向夹角 $\alpha = 10^\circ$ 。已知 $F = 1\text{kN}$ ， $AB = r = 50\text{mm}$ ， $OB = l = 150\text{mm}$ 。试求曲轴位于 xOy 平面内时，力 F 对图中各坐标轴之矩。

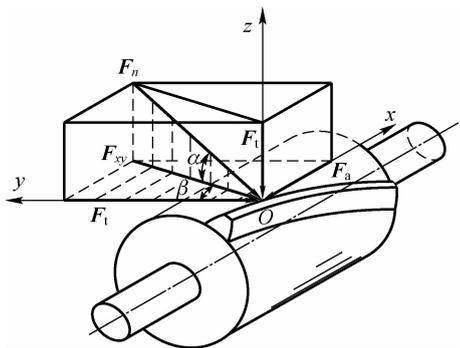


图 3-18

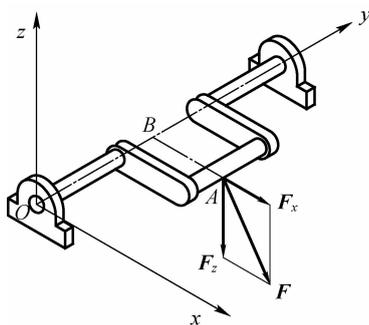


图 3-19

3-9 立方体的边长和作用在其上的各力的方向如图 3-20 所示，各力大小为： $F_1 = 100\text{N}$ ， $F_2 = 200\text{N}$ ， $F_3 = 300\text{N}$ ，求：①各力在 x 、 y 、 z 坐标轴上的投影。②力 F_3 对各轴之矩（长度单位：cm）。

3-10 如图 3-21 所示，在手柄 AB 的端点 B 作用一力 F ，已知 $F = 100\text{N}$ ， $OA = 250\text{mm}$ ， $AB = 200\text{mm}$ ， $\alpha = 45^\circ$ ， $\beta = 60^\circ$ ，试求力 F 对图中各坐标轴之矩。

3-11 已知力 P 的大小和方向如图 3-22 所示，力 P 位于其过轮缘上作用点的切平面内，且与轮平面成 $\alpha = 60^\circ$ 角，求力 P 对 z 轴的矩。

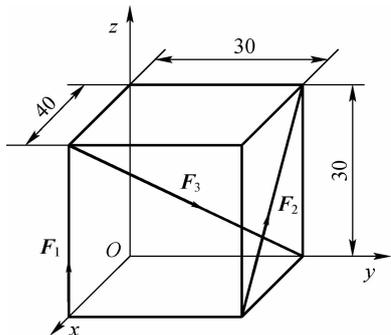


图 3-20

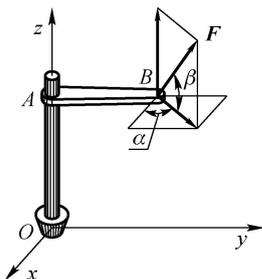


图 3-21

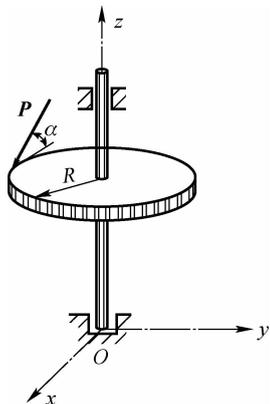


图 3-22

3-12 如图 3-23 所示, 重物 $Q = 10\text{kN}$, 由撑杆 AD 及链条 BD 和 CD 所支持。杆的 A 端以铰链固定, 又 A 、 B 和 C 三点在同一铅垂墙上。尺寸如图所示, 求撑杆 AD 和链条 BD 、 CD 所受的力 (注: OD 垂直于墙面, $OD = 20\text{cm}$)。

3-13 三根不计重量的杆 AB , AC , AD 在 A 点用铰链连接, 各杆与水平面的夹角分别为 45° , 45° 和 60° , $F = 0.6\text{kN}$ 。如图 3-24 所示。试求在与 OD 平行的力 F 作用下, 各杆所受的力。

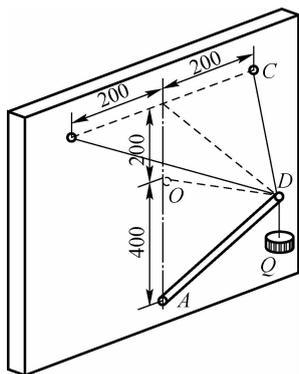


图 3-23

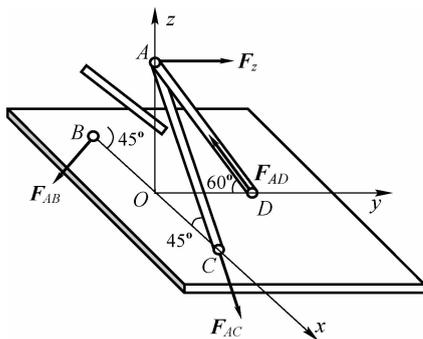


图 3-24

3-14 如图 3-25 所示, 一重量 $W = 1000\text{N}$ 的匀质薄板用止推轴承 A 、径向轴承 B 和绳索 CE 支持在水平面上, 可以绕水平轴 AB 转动, 在板上作用一力偶, 其力偶矩为 M , 并设薄板平衡。已知 $a = 3\text{m}$, $b = 4\text{m}$, $h = 5\text{m}$, $M = 2000\text{N} \cdot \text{m}$, 试求绳子的拉力和轴承 A 、 B 约束力。

3-15 作用于半径为 120mm 的齿轮上的啮合力 F 推动皮带绕水平轴 AB 作匀速转动。已知皮带紧边拉力为 200N , 松边拉力为 100N , 尺寸如图

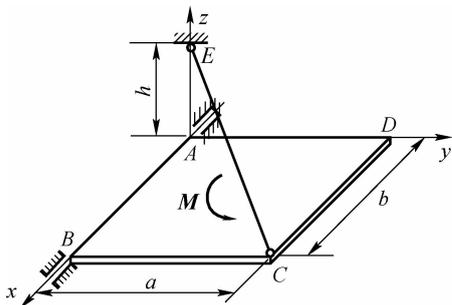


图 3-25

3-26 所示。试求力 F 的大小以及轴承 A 、 B 的约束力（尺寸单位 mm）。

3-16 求图 3-27 所示截面重心的位置。

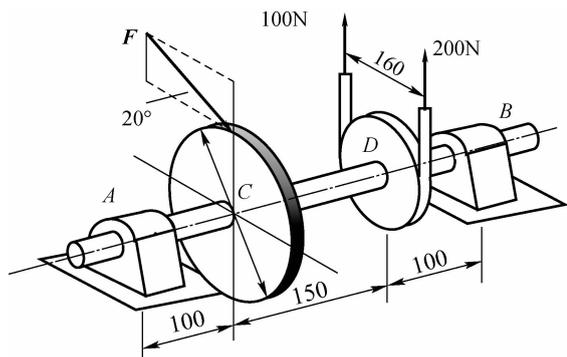


图 3-26

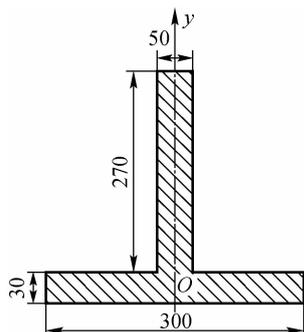


图 3-27

3-17 图 3-28 所示为一半径 $R = 10\text{cm}$ 的均质薄圆板。在距圆心为 $a = 4\text{cm}$ 处有一半径为 $r = 3\text{cm}$ 的小孔。试计算此薄圆板的重心位置。

3-18 如图 3-29 所示，为了测汽车的重心位置，可将汽车驶到秤上，称得汽车总重的大小为 W ，再将后轮驶到地秤上，称得后轮的压力 N ，即可求得重心的位置。今已知 $W = 34.3\text{kN}$ ， $N = 19.6\text{kN}$ ，前后两轮之间的距离 $l = 3.1\text{m}$ ，试求重心 C 到后轴的距离 b 。

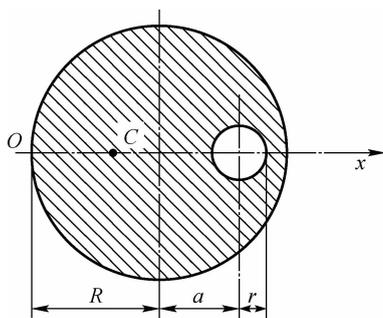


图 3-28

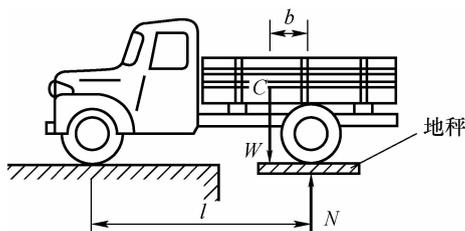


图 3-29